PART2 定積分の置換積分法

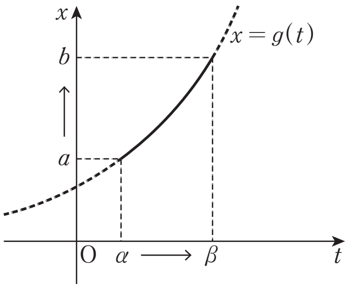
要点整理と公式

要点 ① 定積分の置換積分法①

$x=g(t)$ のとき，関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$，すなわち $F(x)=\int f(x)dx$ とすると，不定積分の置換積分法により

$$F(x)=\int f(g(t))g'(t)dt$$

と表される。



ここで，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ とすると，x と t の関係は右表のように表される。このとき

x	a	→	b
t	α	→	β

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dx=[F(x)]_{\alpha}^{\beta}=[F(g(t))]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=F(b)-F(a)=[F(x)]_{a}^{b}=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

となる。よって，次の公式が得られる。

定積分の置換積分法①

$x=g(t)$，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

x	a	→	b
t	α	→	β

(ex) 定積分 $\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx$ を求める。

$t=\sqrt{x-2}$ とおくと $x=t^2+2$

x		→	
t		→	

$\dfrac{dx}{dt}=2t$ つまり $dx=2tdt$

$$\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx=\int\ (t^2+2)t\cdot 2tdt=2\int_0^1(t^4+2t^2)dt$$

$$=2\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{5}(1-0)+\frac{4}{3}(1-0)=\frac{26}{15}$$

要点 ② 定積分の置換積分法②

定積分の置換積分法の公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$ において，x と t を入れ替えると，次の公式が得られる。

定積分の置換積分法②

$\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$　　ただし，$g(x)=t$，$g(a)=\alpha$，$g(b)=\beta$

(ex) 不定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\cos x dx$ を求める。

$\sin x=t$ とおくと　$\cos x dx=dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\cos x dx=\int\ (1+t^2)dt$$

$$=\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
t		$\to$	

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 x dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx$

Point Pickup

定積分の置換積分法

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$　　ただし $x=g(t)$，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$

$\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$　　ただし $g(x)=t$，$g(a)=\alpha$，$g(b)=\beta$

以下の形のように，不定積分がすぐに求められる場合は，置き換えせずに定積分を求めることが可能。その場合は，積分区間の置き換えは不要となる。

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$$

$$\int \{g(x)\}^\alpha g'(x)dx=\frac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$$

第 17 講 PART2 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

1 $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$\sqrt{x+1}=t$ とおいて，t の定積分で表して求める。

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\boxed{イ}$$

$$=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

x	0	→	3
t	1	→	ア

[イ の選択肢]

① $\displaystyle\int_1^2 (t^2-1)dt$　② $\displaystyle\int_1^2 (2t^2+2)dt$

③ $\displaystyle\int_1^2 (2t^2-2)dt$　④ $\displaystyle\int_0^3 (2t^2-2)dt$

2 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^4 x dx$

$\cos x=t$ とおいて，t の定積分で表して求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^4 x dx=\boxed{オ}$$

$$=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$$

[オ の選択肢]

① $\displaystyle\int_0^1 t^4 dt$　② $\displaystyle\int_1^0 t^4 dt$

③ $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{2} dt$　④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^4 dt$

3 $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$

$\log x = t$ とおいて，t の定積分で表して求める。

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \boxed{\text{ク}}$$

$$= \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

[$\boxed{\text{ク}}$ の選択肢]

① $\displaystyle\int_0^1 tdt$　② $\displaystyle\int_0^1 t^2 dt$

③ $\displaystyle\int_1^e tdt$　④ $\displaystyle\int_0^1 e^t dt$

[MEMO]

PART2 定積分の置換積分法

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 x dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx$

[解答]

(1) $\sqrt{x-1}=t$ とおくと $x=t^2+1$，$dx=2tdt$

x	$2 \to 5$
t	$1 \to 2$

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2 \frac{t^2+1}{t}\cdot 2tdt$$

$$=2\int_1^2 (t^2+1)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_1^2=\frac{20}{3}$$

(2) $\cos x=t$ とおくと $-\sin x dx=dt$

x	$0 \to \frac{\pi}{3}$
t	$1 \to \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\cdot(-\sin x)dx$$

$$=-\int_1^{\frac{1}{2}} t^3 dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 t^3 dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{15}{64}$$

(3) $e^x+2=t$ とおくと $e^x dx=dt$

x	$0 \to 1$
t	$3 \to e+2$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx=\int_3^{e+2}\frac{1}{t}dt$$

$$=[\log t]_3^{e+2}=\log(e+2)-\log 3=\log\frac{e+2}{3}$$

第17講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：③，ウ：8，エ：3

[解説]

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，

$$x=t^2-1$$

x	0	$\to$	3
t	1	$\to$	$\mathbf{2}$

$$dx=2tdt$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt \quad \text{[A]}$$

$$=\int_1^{\mathbf{2}}(\mathbf{2t^2-2})\,\mathbf{dt}$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^3-2t\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}(8-1)-2(2-1)$$

$$=\frac{14}{3}-2$$

$$=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

[A]　定積分の置換積分法①

$x=g(t)$，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

x	a	$\to$	b
t	α	$\to$	β

2　**[正解]** オ：①，カ：1，キ：5

[解説]

$\cos x=t$ とおくと，

$$-\sin x dx=dt$$

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
t	1	$\to$	0

[B]

[B]　t の積分区間を求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^4 x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\cdot(-\sin x)dx$$

[C]

[C]　定積分の置換積分法②

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$$

ただし，$g(x)=t$，$g(a)=\alpha$，$g(b)=\beta$

$$=-\int_1^0 t^4 dt$$

$$=\int_0^1 \boldsymbol{t^4 dt}$$

$$=\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

3　**[正解]** ク：①，ケ：1，コ：2

[解説]

$\log x=t$ とおくと，

$$\frac{dx}{x}=dt$$

x	1	$\to$	e
t	0	$\to$	1

$$\int_1^e\frac{\log x}{x}dx=\int_1^e\log x\cdot\frac{dx}{x}$$ [D]

[D]　$\frac{\log x}{x}=\log x\cdot(\log x)'$

と表すことができ，$f(g(x))g'(x)$ の形で表される。

$$=\int_0^1 \boldsymbol{tdt}$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$